לוגיקה:

* קשרים: P,Q פסוקים - ניתן להגיד עליהם נכון/לא נכון.

P	Q	$P\wedge Q$	$P\vee q$	$p\to q$	$p\leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1

True - 1
False - 0

⊛ מינוח - "הצרנה" היא כתיבת משפט בצורה פורמלית.

* דוגמא: הצרינו "למדתי לבוחן ובכל זאת נכשלתי".
פתרון: P - למדתי לבוחן, q נכשלתי והמשפט אומר $P\wedge q$

* שאלה: הצרינו: "עדן לובש חולצה סגולה בכל פעם שהוא לובש מכנסיים בצבע שחור".
פתרון: P - עדן לובש חולצה בצבע סגול.
q - עדן לובש מכנסיים שחורים.
המשפט אומר $q\to p$

* שאלה: "כאשר אני עייף ורעב אני עצבני או שאני הולך לישון. אבל אם אני עצבני ולא עייף אז אני רעב".
פתרון: P - אני עייף
q - אני רעב
S - אני הולך לישון
t - אני עצבני.
המשפט אומר: $[(P\wedge q)\to(t\vee S)]\wedge[(t\wedge(\neg P))\to q]$.

⊛ הגדרה: פסוק P יקרא טאוטולוגיה אם P בעל ערך אמת True לכל הצבה של ערכי אמת באטומים שמשתתפים בו.

למשל: $P\vee(\neg P)$ טאוטולוגיה כי:

P	$\neg P$	$P\vee(\neg P)$
1	0	1
0	1	1

⊛ הגדרה: פסוקים P,q יקראו שקולים לוגית ונסמן $P\equiv q$ אם $p\leftrightarrow q$ טאוטולוגיה.
(במילים אחרות: ל P,q יש אותה טבלת אמת)
סימון נוסף: $P\leftrightarrow q$: "אם ורק אם" (אמ"מ).

תרגיל: יהיו p,q פסוקים. הוכיחו ש.

1. $\neg(p\vee q)\equiv(\neg p)\wedge(\neg q)$
2. $p\to q\equiv(q)\vee(\neg p)$
3. $p\to q\equiv(\neg q)\to(\neg p)$

פתרון: נוכיח 2+3:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\to q$	$\neg q\vee p$	$(\neg q)\to(\neg p)$	$\neg p\vee q$
1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1

עוד טאוטולוגיות - תכונות הקשרים:

עבור p,q,r - פסוקים מתקיים:

1. חילופיות - $p\vee q\equiv q\vee p$, $p\wedge q\equiv q\wedge p$
2. קיבוציות - $(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$

מסקנה: יש משמעות יחידה ל $p\wedge q\wedge r$ $\quad (p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$

3. פילוג - $p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$
   $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
4. דה מורגן - $\neg(p\vee q)\equiv(\neg p)\wedge(\neg q)$
   $\neg(p\wedge q)\equiv(\neg p)\vee(\neg q)$

מינוחים:

יהיו p,q פסוקים. אם $p\to q$ טאוטולוגיה אז נסמן $p\Rightarrow q$

ונאמר: 1. p מספיק ל-q
2. q הכרחי ל-p

למשל: x מספר אי-זוגי $\Leftarrow$ מספר ראשוני $\to$ $2<x$

מינוח: 1. להיות מספר ראשוני גדול מ-2 (תנאי) מספיק כדי להיות אי זוגי

2. להיות מספר אי זוגי הוא (תנאי) הכרחי כדי להיות ראשוני גדול מ-2.

כמתים ופרדיקטים (יחסים):

כמתים: $\exists$ קיים

$\forall$ לכל

יחסים: פונקציות שתלויות במשתנים ולאחר הצבה במשתנים מקבלים פסוק.

למשל: נגדיר $S(x,y)$ להיות היחס $x\leq y$

ואז 1. $S(2,3)$ True

$S(3,2)$ False

בס"ד

המשך תרגול ← ...

2. $\forall x \exists y\, S(x,y)$

כן, אם למשל x,y מספרים מתוך השלמים.

* משפט:

$\forall p\in\mathbb{N}: (p \text{ ראשוני}) \Longleftrightarrow [\forall a\in\mathbb{N}\,\forall b\in\mathbb{N}: p|ab \Rightarrow (p|a \vee p|b)]$

הסימון $p|x$ ("p מחלק את x") ופירושו שקיים $t\in\mathbb{N}$ המקיים $x=pt$ למשל $2|16$, $3|6$, $4\nmid 6$.

- חידודים: נגדיר $\tilde{S}(x,y)$ להיות היחס $x<y$.

1. שמות המשתנים אינם חשובים במובן ש: $\forall x\forall y\, \tilde{S}(x,y)$ זה כמו $\forall s\forall t\, \tilde{S}(s,t)$.
2. הסדר משנה: $\forall x\exists y\, \tilde{S}(x,y)$ זה לא כמו - $\exists y\forall x\, \tilde{S}(x,y)$ זה לא כמו - $\forall x\exists y\, \tilde{S}(y,x)$
3. צריך לדעת מאיפה המשתנים מגיעים. למשל:
   $\forall y\in\mathbb{Z}\,\exists x\in\mathbb{Z}\, \tilde{S}(x,y)$ ✓ כאשר $x<y$.
   $\forall y\in\mathbb{N}\,\exists x\in\mathbb{N}\, \tilde{S}(x,y)$ ✓

שלילת פסוקים:

מה השלילה של הפסוק: "לכל אדם קיים דג עם מספר קשקשים בגיל האדם וגם שאורכו עשירית מאורך האדם".

* פתרון:

1. לא [לכל אדם ....]
2. קיים אדם שלא [קיים דג ...]
3. קיים אדם שלכל דג לא [מספר קשקשים...]
4. קיים אדם שלכל דג מספר הקשקשים אינו בגיל האדם וגם אורכו לא עשירית מאורך האדם.

במה נשתמש?

1. $\neg\forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x)$
2. $\neg\exists x\, P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$

* דוגמא: מה השלילה של:

$\forall x\in\mathbb{R}\,\exists A\subseteq\mathbb{Q}\,\forall \varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}\,\exists q\in A: |x-q|<\varepsilon$

פתרון:

$\exists x\in\mathbb{R}\,\forall A\subseteq\mathbb{Q}\,\exists \varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}\,\forall q\in A: |x-q|\geq\varepsilon$