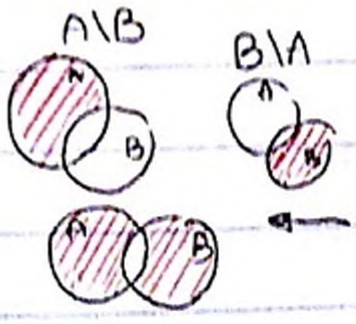
שיעור 2:

סימון - כאשר $A\subseteq B$ וגם $A\neq B$
מסמנים $A\subset B$ או $A\subsetneq B$

פעולות על קבוצות:

* איחוד - $A\cup B=\{x \mid x\in A \lor x\in B\}$
* חיתוך - $A\cap B=\{x \mid x\in A \land x\in B\}$
* הפרש - $A\setminus B=\{x \mid x\in A \land x\notin B\}$
* הפרש סימטרי - $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$



* תרגיל: $A\triangle B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$
* פעולה נוספת: לכל קבוצה A נגדיר את קבוצת החזקה של A:

$$P(A):=\{X \mid X\subseteq A\}$$

* תרגיל: מצאו את Powerset $P(\{1,2,3\})=$
$=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2,3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\emptyset\}$

* הבחנה: לכל קבוצה A מתקיים:
א. $\emptyset\in P(A)$
ב. $A\in P(A)$

הוכחה - 1. ראינו כי לכל קבוצה A, $A\supseteq\emptyset$ ולכן מהגדרת $P(A)$, $P(A)\ni\emptyset$.
2. לכל קבוצה A מתקיים $A\supseteq A$ ולכן מהגדרת $P(A)$ מתקיים $P(A)\ni A$

* שאלה - האם $A\subseteq P(A)$?

תשובה - במקרה $A=\{1,2,3\}$ יתקיים $A\subseteq P(A)$ אמ"מ כל האברים מתקיימים: $1\in P(A)$, $2\in P(A)$, $3\in P(A)$.
אבל $1\notin P(A)$ לכן לא מתקיים $A\subseteq P(A)$.

* שאלה - ① עבור $A=\{1,2,3\}$ האם $\{\emptyset\}\in P(A)$?

תשובה - $\{\emptyset\}$ לא מופיע ברשימה
$\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2,3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\emptyset\}$

* שאלה - ② האם $\{\emptyset\}\subseteq P(A)$?

תשובה - ראינו כי לכל A מתקיים $P(A)\ni\emptyset$ לכן $P(A)\supseteq\{\emptyset\}$

המשך

שאלה - נניח A קבוצה סופית בת n איברים.
הראו כי ב- $P(A)$ יש 2^n איברים.

תשובה - נימוק קומבינטורי. נמנה את איברי הקבוצה:

ראשון שני שלישי ... n.

כל תת קבוצה של A מותאמת לרשימה מהצורה

נמצא	לא נמצא	נמצא	...	לא נמצא
ראשון	שני	שלישי	...	n

לכל איבר יש שתי אפשרויות: נמצא/לא נמצא.
אז בסך הכל האפשרויות הן
$\underbrace{2}_{\text{ראשון}} \cdot \underbrace{2}_{\text{שני}} \cdots \underbrace{2}_{n}$

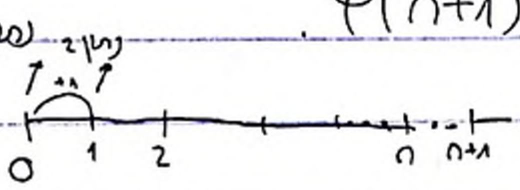
סה"כ: 2^n

עקרון האינדוקציה:

נניח $\varphi(x)$ פסוק אודות x. אם שני הבאים מתקיימים:

1. $\varphi(0)$
2. נניח n טבעי. אם $\varphi(n)$, אז $\varphi(n+1)$.

אז $\varphi(n)$ מתקיים לכל n טבעי.



נראה באינדוקציה:

לכל n טבעי ולכל קבוצה A בת n איברים, מתקיים כי $P(A)$ בת 2^n איברים.

$\varphi(x)$ - לכל קבוצה A בת x איברים ל- $P(A)$ יש 2^x איברים.

מעקרון האינדוקציה מספיק לוודא את סעיפים 1-2.

1. **בסיס האינדוקציה:** נבקש להראות $\varphi(0)$.

לשם כך, נניח A קבוצה בת 0 איברים. אז ראינו בשיעור שעבר כי $A=\emptyset$ אבל אז:

$$P(A)=P(\emptyset)=\{x \mid x\subseteq\emptyset\}=\{\emptyset\}$$

ולכן ב- $P(A)$ יש איבר אחד, כלומר 2^0 איברים.

2. **צעד האינדוקציה** - נניח n מס' טבעי ומתקיים כי לכל קבוצה A בת n איברים, ל- $P(A)$ יש 2^n איברים.

נבקש להראות כי לכל קבוצה A בת n+1 איברים, ל- $P(A)$ יש 2^{n+1} איברים.

המשך.

נניח A קבוצה סופית בת $n+1$ איברים.

$$A=\{a_0,a_1,\dots a_n\}$$

$$P(A)=\{X \mid X\subseteq\{a_0,a_1,\dots a_n\}\}=$$

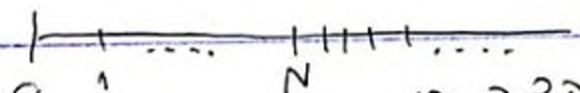
$$=\{X, X\cup\{a_0\} \mid X\subseteq\{a_1,\dots a_n\}\}$$

לדוגמא אם $X=\{a_2\}$ ואז $X=\{a_2\}$, $X\cup\{a_0\}=\{a_0,a_2\}$

לכל $X\subseteq\{a_1,\dots,a_n\}$ אנו מקבלים שני איברים
בקבוצה $P(\{a_0,a_1,\dots a_n\})$ (האיברים הם X ו- $X\cup\{a_0\}$)
הואיל ול- $\{a_1,\dots a_n\}$ יש n איברים, ל- $P(\{a_1,\dots a_n\})$ יש 2^n איברים.
לכל X ב- $P(a_1..a_n)$ התאמנו שני איברים ולכן
ב- $P(\{a_0\dots a_n\})$ יש פעמיים מספר האיברים ב- $P(\{a_1\dots a_n\})$
כלומר $2\cdot 2^n$ קיבלנו 2^{n+1} כמבוקש.

תרגיל: הראו כי לכל n טבעי גדול מספיק מתקיים:
$n^3<2^n$

גדול מספיק: קיים N כך שלכל n טבעי $n\geq N$ מתקיים
$n^3<2^n$



פתרון: נראה באינדוקציה כי
לכל $n\geq 10$ מתקיים $n^3<2^n$

בסיס האינדוקציה: עבור $n=10$ מתקיים
$2^n=1024>1000=n^3$ כמבוקש.

צעד האינדוקציה: נניח n טבעי ≥ 10 ומתקיים
$2^n>n^3$. נבקש להראות $2^{n+1}>(n+1)^3$

$$(n+1)^3=\underline{n^3}+3n^2+3n+1<\underline{2^n}+3n^2+3n+1$$

נתון $n^3<2^n$.

$$\underset{\text{כיוון ש } n>0}{<} 2^n+4n^2+4n+1 = 2^n+(2n+1)^2 \underset{n>1}{<} 2^n+(2n+n)^2=$$

$$=2^n+(3n)^2=2^n+9n^2\underset{n>9}{<}2^n+n^3<2^n+2^n=2\cdot 2^n=$$

$$=2^{n+1}.$$