בס"ד

בדיחה:

* תרגיל: נתבונן בכותרת של השיר של Palmer ו-Williams מ- 1924.

Everybody loves my baby, but my baby don't love nobody but me.

ננסה להבין:

נגדיר שני יחסים דו מקומיים:

$L(x_0,x_1)$ המביע כי x_0 אוהב את x_1.

$S(y_0,y_1)$ המביע כי y_0 הילד של y_1.

$$\forall x(S(x,\text{אני}) \to (\forall y(L(y,x)) \land (\forall y(L(x,y) \to (y=\text{אני}))))$$

x עוסק ב my baby.

מהגדרת המשמעות של הכמת $\forall y$, הוא T אמ"מ לכל בחירה של y מקבלים T. בפרט, ניקח $y=x$. קיבלנו:

$$\forall x(S(x,\text{אני}) \to (L(x,x) \land (L(x,x) \to (x=\text{אני}))))$$

מטבלת האמת של $\to$

$L(x,x) \land (L(x,x) \to (x=\text{אני}))$ נותן $(x=\text{אני})$

כלומר קיבלנו:

$$\forall x(S(x,\text{אני}) \to (x=\text{אני}))$$

במילים: כל ילד שהוא שלי הוא אני.

מסקנה: אין לי ילדים.

מודוס פוננס: הנחות: A, $A \to B$

מסקנה: B.

ב"ה

מבוא לתורת הקבוצות:

קבוצה = אוסף של פריטים מתמטיים. [לא כל אוסף הוא קבוצה].

דוגמאות:

$A=\{2,3,5\}$ הגדרה מפורשת

$B=\{p \mid$ p טבעי, ראשוני, קטן מ-6 $\}$ הגדרה לפי תנאי.

$C=\{p \mid$ p ראשוני, גדול מ-6 $\}$

- הבחנה: $A=B$

הגדרה: קבוצות x,y הן שוות ורושמים $x=y$ אמ"מ כל איבר של x שייך ל-y וכל איבר של y שייך ל-x.

למשל:
$$\left.\begin{array}{l} x=\{1,2,3\} \\ y=\{1,3,2\} \\ z=\{1,1,1,1,2,2,3,2\} \end{array}\right\} \rightarrow x=y=z$$

- לסדר וריבוי אין חשיבות בקבוצות.

סימון: $x\in y$: x איבר ב-y
x שייך ל-y.
$y\ni x$.

הגדרה: קבוצת המספרים הטבעיים:
$$\mathbb{N}=\{0,1,2,3\ldots\}$$

הגדרה: קבוצת המספרים השלמים:
$$\mathbb{Z}=\{\ldots-3,-2,-1,0,1,2,3\ldots\}$$
$$=\{n,-n \mid n\in\mathbb{N}\}$$

שאלה: $A:=\mathbb{N}$, $B:=\{\mathbb{N}\}$ האם $A=B$?

תשובה: לא. ב-B יש איבר אחד.
ב-A יש אינסוף איברים.

- לכן $A\neq B$, עם זאת $A\in B$.

$$B=\{\{0,1,2,\ldots\}\}$$

בס"ד

הגדרה: קבוצת המספרים הרציונליים:

$$\mathbb{Q}=\{p/q \mid q\neq 0,\ p,q\in\mathbb{Z}\}$$
$$=\{p/q \mid q\neq 0,\ q\in\mathbb{Z},\ p\in\mathbb{N}\}$$
$$=\{p/q \mid q\neq 0,\ q\in\mathbb{N},\ p\in\mathbb{Z}\}$$

סימון: כותבים $A\subseteq B$ בקיצור לקביעה:
$\forall x\in A\,(x\in B)$
יותר מדויק: $\forall x\,(x\in A\to x\in B)$
למשל: $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$

$$\{2,3\}\subseteq\{1,2,3\}$$
$$\{2,3\}\not\subseteq\{1,\{2,3\}\}$$

- שימו לב: מהגדרת שוויון קבוצות, לכל A, B מתקיים: $A=B$ אמ"מ $(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)$
אפשר גם לכתוב $A\supseteq B$ במקום $B\subseteq A$

הקבוצה הריקה:

סימון: $\emptyset$ $\{\ \}$

$$\{0\}\neq\{\ \}$$
0 הוא איבר. אין איברים

$$\{\emptyset\}\neq\emptyset$$
$\emptyset=\{x \mid$ x זוגי וגם x לא זוגי$\}$

שאלה: כמה איברים יש בקבוצה הבאה? $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset\}\}$
תשובה: 2.

$$\{A,B\}=\{A,B,B\}$$
- אם $A=B$, אז הקבוצה הזו שווה ל- $\{A\}$ ואז התשובה היא 1.
- אם $A\neq B$, אז התשובה היא 2.

(*) $A := \emptyset$, $B := \{\emptyset\}$ לא שווים

(*) $A := \emptyset$, $B := \emptyset$ כן שווים.

(*) **יחידון:** קבוצה שיש בה רק איבר אחד. (סינגלטון).

טענה: לכל קבוצה A מתקיים $A \supseteq \emptyset$

הוכחה: יש להראות כי כל x השייך ל-$\emptyset$ מקיים כי הוא שייך ל-A.
אבל אין x כנ"ל ולכן זה מתקיים באופן ריק.

מסקנה:
הקבוצה הריקה היא יחידה.

(*) **הוכחה:** נניח A,B ריקות. נראה כי $A=B$.
באופן שקול יש להראות $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$
$A \subseteq B$: כמו בהוכחה הקודמת, מתקיים באופן ריק כי כל x השייך ל-A, שייך ל-B.
$B \subseteq A$: אותו הדבר.

אקסיומת הקבוצה הריקה: קיימת קבוצה ריקה.

מסקנה:
קיימת קבוצה ריקה אחת ויחידה.

הגדרה: קבוצת המספרים הממשיים $\mathbb{R} = \{x \mid \text{ממשי } x\}$
מספרים עם הצגה עשרונית.

הגדרה: קבוצת המספרים המרוכבים.
$\mathbb{C} = \{a+bi \mid a,b \text{ ממשיים}\}$