שיעור הדידה תחשיב היחסים המשך.

בשפת תחשיב היחסים כל פסוק מתקבל ע"י תהליך סופי בו מפעילים קשרים וכמתים ע"ג יחסים (האטומים).

* בפרט בשפה יש:

1. משתנים חופשיים, המסומנים בדרך כלל x, y, z
או $x_0, x_1, x_2 \dots$
$y_0, y_1, y_2 \dots$

2. יחסים. מסומנים בדר"כ:
$P(x)$ חד מקומי
$Q(x, y)$ דו מקומי
$R(x_0, \dots, x_n)$ (n+1) מקומי

3. קשרים. $\leftrightarrow, \rightarrow, \vee, \wedge, \neg$

4. כמתים. $\forall$ לכל
$\exists$ קיים

* למשל: $P(x), Q(y,z)$ $\rightarrow$ פסוקים אטומיים
ואז $\exists x P(x)\ \forall y \exists z Q(y,z)$ $\rightarrow$ פסוקים מורכבים.
ואז $(\exists x P(x)) \rightarrow (\forall y \exists z Q(y,z))$
ואז $\neg((\exists x P(x)) \rightarrow (\forall y \exists z Q(y,z)))$ וכן הלאה...

* הגדרת ערך האמת של הכמת $\exists$
פסוק מהצורה $\exists x \underbrace{\dots\dots}$ הוא T אמ"מ קיימת הצבה של x עבורה מקבלים T.

* למשל: $\underbrace{Q(x)}$ - x זוגי
מהו ערך האמת של $\exists x \underbrace{Q(x)}$?
תשובה: T, כי $Q(2)$ הוא T.

* הגדרת ערך האמת של הכמת $\forall$
פסוק מהצורה $\forall x \underbrace{\dots\dots}$ הוא T אמ"מ לכל הצבה של x מקבלים T.

* שאלה: עבור $Q(x)$ מקודם. מהו ערך האמת של $\forall x \underbrace{Q(x)}$?
תשובה: F. כי $Q(1)$ הוא F.

* מושג בהקשר: מרחב המדגם, הכוונה כששואלים על קיומה של הצבה עבור x, בעצם שואלים על x מתוך מרחב המדגם הנתון.

- דוגמא לפסוק מורכב:

$$R(x_0 \dots x_n) \xrightarrow{\exists x_0} \exists x_0 R(x_0 \dots x_n) \qquad Q(x) \xrightarrow{\neg} \neg Q(x)$$

$$\neg Q(x),\ \exists x_0 R(x_0 \dots x_n) \xrightarrow{\wedge} \neg Q(x) \wedge \exists x_0 R(x_0 \dots x_n)$$

המשך

– עוד דוגמא: נניח $P(x)$ יחס המציין $x=x$.
תשובה: ערך האמת של $\forall x P(x)$ הוא T.

– עוד דוגמא: נתבונן ביחס ה-B מקומי $P(x,y)$ המציין כי x מכסה מקוטר של הסיר y.
נמנה שלושה פסוקים מורכבים:
- T $\forall y \exists x P(x,y)$ לכל סיר יש מכסה (המתאים לו)
- F $\exists x \forall y P(x,y)$ קיים מכסה המתאים לכל הסירים.
- F $\forall x \forall y P(x,y)$ לכל מכסה, לכל סיר, המכסה והסיר מתאימים.

$$\overbrace{\overbrace{\forall x \forall y P(x,y)}^{*} \to \overbrace{\exists x \forall y P(x,y)}^{F}}^{T}$$

* נובע כי $\forall x \forall y P(x,y)$ הוא F.

* טענה: נניח φ פסוק, אזי $\forall x \varphi \to \exists x \varphi$ מקבל ערך T.

$\forall x \varphi$	$\exists x \varphi$	$\forall x \varphi \to \exists x \varphi$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

יש להראות כי שורה זו אינה אפשרית.

– שאלה: האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית?

$$\exists x \underbrace{(P(x)\wedge Q(x))}_{\text{טווח הקשירה}} \wedge \exists x \underbrace{R(x)}_{\text{טווח הקשירה}}$$ *

[T אומר $\exists x R(x)$ T.
וגם $\exists x (P(x)\wedge Q(x))$ T.]

$$\exists x \underbrace{(P(x)\wedge Q(x)\wedge R(x))}_{\text{טווח הקשירה}}$$

* $\exists x (P(x)\wedge Q(x)\wedge R(x))$ גורר לוגית את $\exists x (P(x)\wedge Q(x)) \exists x R(x)$

– **תשובה:** נראה כי הם אינם שקולים לוגית.
$P(x)$ - קיים ל-x הורה
$Q(x)$ - אין ל-x אבא.
$R(x)$ - אין ל-x אמא.
תחת הפירושים שבחרנו, הפסוק הראשון הוא True כי ניתן למצוא שני x המקיימים את המבוקש.
הפסוק השני הוא False כי לא ניתן למצוא x המקיים את כל המבוקש

בס"ד

⊛ **כמת נוסף:** $\exists!$ - קיים ביחידות.

$\exists! x\, \varphi$ - אומר קיים x אחד ויחיד שהצבתו ב-φ תהפוך את φ ל- True.

- **למשל:** $Q(x)$ - x זוגי.

  $\exists x\, Q(x)$ T כי $Q(2)$

  $\exists! x\, Q(x)$ F כי $Q(2), Q(4)$.

- **דוגמא 2:** $R(x)$ - x הוא אפס

  $\exists x\, R(x)$ - True $R(0)$

  $\exists! x\, R(x)$ True $R(0)$ ורק הוא.

- **דוגמא 3:** $P(x)$ - x שורש ריבועי של 4.

  $\exists x\, P(x)$ - True כי $P(2)$.

  $\exists! x\, P(x)$ - False כי $P(2), P(-2)$.

⊛ **יחס נוסף**, דו מקומי: $=$: במקום להגדיר יחס דו מקומי $E(x,y)$ המגיע כי x שווה ל-y. נהוג פשוט לרשום $x=y$. במקום לכתוב $\neg(x=y)$, נרשה לעצמנו לכתוב $x\neq y$.

⊛ **הבחנה:** ניתן להביע את הכמת $\exists!$ באמצעות כמתים וקשרים שכבר פגשנו.

למשל:
$$\exists x\,(\underbrace{P(x)}_{\text{קיים}} \wedge \underbrace{\neg(\exists y((y\neq x)\wedge P(y)))}_{\text{יחידות}})$$

למשל:
$$\exists x\,(P(x)\wedge \forall y(P(y)\rightarrow y=x))$$

למשל:
$$\underbrace{\exists x\, P(x)}_{\text{אוסף האיברים המקיים P לא ריק}} \wedge \underbrace{\forall x \forall y((P(x)\wedge P(y))\rightarrow (x=y))}_{\text{לכל היותר - הכי הרבה 1}}$$

שקול לוגית ל- $\exists! x\, P(x)$

⊛ **תרגיל:** הראו כי מתקיימות שקילויות:

1. $\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x(\neg(P(x)))$
2. $\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x(\neg(P(x)))$

⊛ **מסקנה:** - כל טענה בתחשיב היחסים שקולה לטענה בה הכמת היחידי המופיע הוא $\exists$.

- כל טענה בתחשיב היחסים שקולה לטענה בה הכמת היחידי המופיע הוא $\forall$.