הגדרה.

נניח A,B פסוקים אטומיים או מורכבים (*) במקום לכתוב ״$A\to B$ הוא טאוטולוגיה״ נהוג לסמן בקיצור $A\Rightarrow B$ ואומרים A גורר לוגית את B.

$A\to B$
T
⋮
T

טאוטולוגיה: ← הטבלה יוצאת T.

(*) <u>דוגמאות:</u>

$$B\Rightarrow B$$

$$A\wedge B\Rightarrow B$$

A	B	$A\wedge B$	$A\wedge B\to B$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

<u>טאוטולוגיה.</u>

(*) במקום לכתוב ״$A\leftrightarrow B$ הוא טאוטולוגיה״ נהוג לסמן $A\Leftrightarrow B$ או $A\equiv B$ <u>ואומרים:</u> A ו-B שקולים לוגית.

− $\underbrace{(A\wedge B\to B)}_{\text{טאוטולוגיה}}\equiv\underbrace{B\to B}_{\text{טאוטולוגיה}}$

(*) כל הטאוטולוגיות שקולות זו לזו.

(*) כל הסתירות שקולות זו לזו.

כזכור, בשפת תחשיב הפסוקים, כל פסוק מתקבל ע״י תהליך סופי בו מפעילים קשרים על פסוקים אטומיים.

− <u>למשל:</u> A,B,C פסוקים אטומיים. ואז $B\wedge C$, $\neg A$

ואז $(\neg A)\vee(B\wedge C)$

ואז $((\neg A)\vee(B\wedge C))\to A$ וכן הלאה...

(*) <u>שאלה:</u> האם פסוק אטומי יכול להיות שקול לוגית לפסוק מורכב?

<u>תשובה:</u> כן, למשל: $\underset{\text{אטומי}}{A}\equiv\underset{\text{מורכב}}{\neg(\neg(A))}$

$\underset{\text{אטומי}}{A}\equiv A\wedge(B\vee\neg(B))$

A	B	$B\vee\neg(B)$	$A\wedge(B\vee\neg(B))$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	T	F

$$A\equiv(A\wedge(B\vee\neg(B)))\wedge(B\vee\neg(B))$$

חוקי דה מורגן:

לכל שני פסוקים A,B, מתקיים:

1. $(\neg(A\vee B)) \equiv ((\neg A)\wedge(\neg B))$
2. $(\neg(A\wedge B)) \equiv ((\neg A)\vee(\neg B))$

לדוגמא: A - היום יום הולדת

B - יורד גשם.

לא נכון ש: או יורד גשם או היום יום הולדת $\neg(A\vee B)$

שקול ל- היום לא יום הולדת וגם לא יורד גשם. $(\neg A)\wedge(\neg B)$

בדיקת סעיף 1:

A	B	$A\vee B$	$\neg(A\vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A)\wedge(\neg B)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

2: לבדוק בבית.

שאלת מחשבה: נגדיר קשר חדש ונקרא לו $\diamond$

- הראו כי כל פסוק בתחשיב הפסוקים שקול לוגית לפסוק בו הקשר היחיד המופיע הוא $\diamond$.

כלומר כל הקשרים שפגשנו: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, ניתנים למימוש באמצעות $\diamond$.

A	B	$A\diamond B$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

- דוגמא:

A	$\neg A$	$A\diamond A$
T	F	F
F	T	T

A	B	$A\wedge B$	$A\diamond B$	$\neg(A\diamond B)$	$(A\diamond B)\diamond(A\diamond B)$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	T	F	F

* **שאלה:** נתבונן בפסוקים הבאים:

A - כל מי שקונה מקרר זוכה בטיסה לאיטליה

B - דני קנה מקרר

C - דני זכה בטיסה לאיטליה.

מהי הדרך הנכונה לבטא את C כמסקנה מ-A ו-B?

$A \cap B \to C$

שימו לב: כי $A \cap B \to C$ איננו טאוטולוגיה.

A	B	C	$A \cap B \to C$
T	T	F	F

כלומר: $A \wedge B \to C$ במקרה שלנו שואב את הנכונות שלו מתוך התוכן שלו ולא מתוך הצורה שלו.

לכן, צריך למצוא שפה מתמטית או כלי ביטוי עשירים יותר לבטא את הנ"ל.

- צריך להוסיף משתנים ו-יחסים. נקרא: תחשיב היחסים.

נשתמש ב-x כסמל של משתנה.

נגדיר שני יחסים:

$P(x)$ - x קנה מקרר

$Q(x)$ - x זכה בכרטיס טיסה לאיטליה.

B - $P($דני$)$

C - $Q($דני$)$

A - לכל x, $P(x)$ גורר $Q(x)$

* כותבים: A: $\forall x \underbrace{(P(x) \to Q(x))}$ ← כמת "לכל"

טווח הקשירה - ה-x כל במתחם הזה.

נחזור על השאלה ממקודם אבל הפעם בשפה העשירה יותר.

$((\forall x(P(x) \to Q(x))) \cap (P($דני$))) \to Q($דני$)$

זהי טאוטולוגיה. כלומר, הנ"ל נכון מבלי שאנו צריכים לדעת מה P ו-Q מייצגים.

$P(x)$ - x הוא תלמיד חכם

$Q(x)$ - x הוא חכם.

יחס חד-מקומי - כי יש רק משתנה אחד: x

* דוגמא ליחס דו מקומי - $Q(x,y)$ x אבא של y.

* דוגמא ליחס תלת מקומי - $R(x,y,z)$ $x<y<z$

למשל: $R(1,2,3)$ True $1<2<3$ מתקיים

$R(1,1,1)$ False $1<1<1$ לא מתקיים